

4.1. BEWEISUNG DER STRECKENKÜRZE

Die Streckenkürze ist diejenige Kurve, die zwei Punkte in der Ebene verbindet und die kürzeste Länge hat.

Es sei A und B zwei Punkte in der Ebene. Die Strecke AB ist die kürzeste Verbindung zwischen A und B .

Sei γ eine beliebige Kurve, die A und B verbindet. Wir zeigen, dass $AB \leq \gamma$.
Zunächst betrachten wir den Fall, dass γ ein Polygon ist. Sei $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$ die Eckpunkte von γ .
Für zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte P_i und P_{i+1} gilt nach dem Dreiecksungleichungssatz:
 $|P_i P_{i+1}| \geq |P_i A| + |A P_{i+1}|$
Summieren wir diese Ungleichungen für $i = 0, 1, \dots, n-1$, so erhalten wir:
 $|\gamma| = \sum_{i=0}^{n-1} |P_i P_{i+1}| \geq \sum_{i=0}^{n-1} (|P_i A| + |A P_{i+1}|) = n|A B|$
Da $n \geq 1$, folgt $|\gamma| \geq |A B|$.
Für eine allgemeine Kurve γ kann man sie durch ein Polygon approximieren, dessen Länge sich beliebig nahe an die Länge von γ annähert. Folglich gilt auch für allgemeine Kurven $|\gamma| \geq |A B|$.

4.2. DIE STRECKENKÜRZE ALS GEOMETRISCHES PROBLEM

Die Streckenkürze ist ein zentrales Problem der Geometrie. Sie ist die Lösung des Problems, zwei Punkte in der Ebene durch die kürzeste Kurve zu verbinden.

Die Streckenkürze ist eine Gerade. Dies ist ein zentraler Satz der Geometrie. Er besagt, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene eine Gerade ist.